$$= \frac{e^{-i(\frac{\beta-\alpha}{2})} + e^{i(\frac{\beta-\alpha}{2})}}{e^{-i(\frac{\beta-\alpha}{2})} - e^{i(\frac{\beta-\alpha}{2})}} = \frac{2\cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{-2i\sin(\frac{\beta-\alpha}{2})}$$

Conclusion : $Z = i\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$; $\frac{\beta-\alpha}{2} \neq k\pi$

- si on a : $\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2}) > 0$ alors :

$\text{Arg}(Z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|Z| = \cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$

- si on a : $\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2}) < 0$ alors :

$\text{Arg}(Z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $|Z| = -\cot g((\frac{\beta-\alpha}{2})$

Exercice n° 12

$z_a = 1$, $z_B = -2i$ et $z' = \frac{\overline{z} + 4i}{z - 2i}$

● $z' - 1 = \frac{\overline{z} + 4i}{z - 2i} - 1$

$= \frac{\overline{z} + 4i - \overline{z} + 2i}{\overline{z} - 2i} = \frac{6i}{\overline{z} - 2i}$

● on a : $z' - 1 = \frac{6i}{\overline{z} - 2i}$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(z' - 1) \equiv \text{Arg}(\frac{6i}{\overline{z} - 2i})\ [2\pi]$

Comme $\text{Arg}(\frac{a}{b}) \equiv \text{Arg}\, a - \text{Arg}\, b\ [2\pi]$

alors

$\text{Arg}(z' - 1) \equiv \text{Arg}\,(6i) - \text{Arg}(\overline{z} - 2i)\ [2\pi]$

On sait que : $\overline{z + 2i} = \overline{z} - 2i$ donc on a

$\text{Arg}(z' - z_A) \equiv \frac{\pi}{2} - \text{Arg}(\overline{z + 2i})\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(z' - z_A) \equiv \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(z + 2i)\ [2\pi]$

Car $\text{Arg}\,\overline{a} \equiv -\text{Arg}(a)\ [2\pi]$

Il en résulte que :

$\text{Arg}(z' - z_A) - \text{Arg}(z - z_B) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \text{Arg}(\frac{z' - z_A}{z - z_B}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

● a) $M \in \zeta(B, 3) \Leftrightarrow BM = 3$

$\Leftrightarrow |z - z_B| = 3 \Leftrightarrow |z + 2i| = 3$

$\Leftrightarrow |\overline{z + 2i}| = 3$ (car $|\overline{a}| = |a|$)

$\Leftrightarrow |\overline{z} - 2i| = 3$

Or on a : $|z' - 1| = |\frac{6i}{\overline{z} - 2i}| = \frac{|6i|}{|\overline{z} - 2i|}$

Donc $|z' - 1| = \frac{6}{3} = 2$

Donc : $|z' - z_A| = 2$ par suite : $AM' = 2$

Conclusion : **L'ensemble des points M' est le cercle ζ' de centre A et de rayon 2**

b) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow$

$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\in (AB) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AB}) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Par suite : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Conclusion : **M' décrit la droite qui passe par A et perpendiculaire à La droite (AB)**

Exercice n° 13

$z_a = 1$ et $z' = 2z - z^2$

● on a pour $z \neq 0$:

$\text{Arg}(z') - 2\,\text{Arg}(z) \equiv \text{Arg}(z') - \text{Arg}(z^2)\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}(\frac{z'}{z^2})\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}(\frac{2z - z^2}{z^2})\ [2\pi]$

$\text{Arg}(z') - 2\,\text{Arg}(z) \equiv \text{Arg}(\frac{-z(z-2)}{z^2})\ [2\pi]$

$\equiv \text{Arg}(\frac{z-2}{z}) + \pi\ [2\pi]$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn